El matemàtic català David Asperó guanya el premi Hausdorff

Joan Bagaria,
Departament de Matemàtiques i Informàtica, UB

El 29 d'agost, en el marc de la 8th European Set Theory Conference (Torí, 2022) el matemàtic català David Asperó, doctorat per la UB el 2000 i actualment professor de la Universitat d'East Anglia (Norwich, Regne Unit), fou guardonat, juntament and Ralf D. Schindler (Universitat de Münster, Alemanya) amb la Medalla Hausdorff de la Societat Europea de Teoria de Conjunts. El guardó, que s'atorga cada dos anys als autors del treball més influent en teoria de conjunts publicat durant els cinc anys anteriors, ha estat per:

David Asperó i Ralf Schindler
Martin's Maximum^{++} implies Woodin's Axiom $(*)$, Annals of Mathematics 193 (3) (2021), 793-835.

En aquesta nota explicarem breument la importància del resultat dels guardonats[3].

La teoria de conjunts és, per una banda, l'estudi matemàtic de l'infinit. Per altra banda, tota teoria matemàtica es pot interpretar en la teoria de conjunts, i per això es diu que constitueix la fonamentació de la matemàtica. Com a teoria de l'infinit, el seu objectiu principal consisteix a desenvolupar eines i maneres de pensar basades en les nostres intuïcions matemàtiques sobre l'infinit, i al mateix temps fer que siguin útils per a altres àrees de la matemàtica.

Tot i la seva relativa joventut, la teoria de conjunts ha estat molt efectiva tant per resoldre les seves pròpies qüestions fonamentals com per a la solució de problemes matemàtics d'altres camps. Les tècniques i les idees generades dins la teoria de conjunts han permès de resoldre molts problemes matemàtics famosos d'altres àrees, com la conjectura de Kaplansky sobre continuïtat automàtica (Robert Solovay i Hugh Woodin, 1976); el problema de Whitehead sobre grups abelians infinits (Saharon Shelah, 1974); el problema de Brown-Douglas-Fillmore sobre C^*-àlgebres (Ilijas Farah, 2011); un problema de Von Neumann en teoria ergòdica (Matthew Foreman, Daniel Rudolph i Benjamin Weiss, 2011), o el problema de l'espai L en topologia general (Justin Moore, 2006), etc. La literatura matemàtica és plena de grans resultats obtinguts gràcies a l'aplicació d'idees originades en la teoria de conjunts.

Històricament, moltes de les idees més fèrtils foren descobertes intentant de resoldre qüestions fonamentals que sorgeixen dins la mateixa teoria de conjunts, questions que a priori no semblen rellevants per a les C^*-àlgebres, els grups infinits, els sistemes dinàmics o la topologia. El treball guardonat enguany amb la Medalla Hausdorff pertany precisament a l'àmbit de les qüestions fonamentals.

Els axiomes bàsics de la teoria de conjunts, això és, els axiomes de Zermelo-Fraenkel (ZF) amb l'axioma de l'elecció (AC), coneguts conjuntament com a ZFC, formalitzen les nostres intuïcions bàsiques sobre quins tipus de conjunts existeixen, com es relacionen i com obtenir nous conjunts a partir d'altres. Però com Gödel va demostrar amb els seus teoremes d'incompletesa (1931), cap sistema d'axiomes consistent i que contingui l'aritmètica elemental (com és el cas de ZFC) pot decidir totes les qüestions; en particular, no pot mai decidir la qüestió metamatemàtica fonamental de la seva pròpia consistència (suposant, és clar, que el sistema sigui consistent). Més tard, l'univers constructible (Gödel, 1938) i la tècnica del *forcing* (Cohen, 1963) van fer possible el descobriment d'una plètora d'enunciats no metamatemàtics i naturals en el llenguatge de la teoria de conjunts que no són decidibles en el sistema ZFC. Això és, enunciats que ni ells ni la seva negació són demostrables en ZFC. Potser el més conegut d'aquests enunciats és la hipòtesi del continu (CH), coneguda també com el problema número 1 de Hilbert, que afirma que tot conjunt de nombres reals infinit és o

[3] El text és una versió lliure i lleugerament ampliada, amb permís de l'autor, de la *laudatio* feta pel professor Grigor Sargsyan a la cerimònia d'entrega del premi.

bé numerable o bé té la mateixa cardinalitat que $\mathbb{R}$. Gödel va demostrar que CH val en l'univers constructible, i Cohen va demostrar que CH no val en certs models de ZFC obtinguts amb la tècnica de *forcing*, resultat pel qual fou guardonat amb la Medalla Fields (1963). Però fins i tot qüestions ben simples de la teoria descriptiva de conjunts clàssica, com ara si els conjunts projectius de nombres reals són mesurables en el sentit de Lebesgue, no són decidibles en ZFC.

Aquesta situació de no poder decidir moltes qüestions matemàtiques importants amb les eines usuals, això és, en el sistema ZFC, és, en molts sentits, profundament preocupant, i alhora, profundament interessant. La indecidibilitat de qüestions tan bàsiques com la mesurabilitat dels conjunts projectius és aclaparadora, ja que sembla que d'aquesta mena de qüestions n'hauríem de poder saber la resposta. Com podem no saber si certes operacions rudimentàries amb conjunts produeixen conjunts patològics de nombres reals? La independència d'aquestes qüestions sembla indicar que la nostra imatge de l'univers dels conjunts és incompleta; quelcom de profund hi manca. Malgrat això, des del descobriment del *forcing* per Cohen i de la immensa varietat de models de ZFC que aquesta tècnica ha permès de generar, no s'ha descobert cap nou principi sobre conjunts que sigui *òbviament verdader* i que hagi estat simplement passat per alt. Molt probablement, tot el que no sabem no és obvi.

La teoria de conjunts actual té un gran deute amb el passatge següent de Gödel[4] "Què és el problema del continu de Cantor":

Podrien existir axiomes tan abundants en les seves conseqüències verificables, que projectessin tanta llum sobre tota una disciplina, i que proveïssin de mètodes tan poderosos per a resoldre problemes donats (i fins i tot solucionar-los, tant com fos possible, de manera constructivista), que independentment de la seva necessitat intrínseca haurien de ser assumits almenys en el mateix sentit que qualsevol teoria física ben establerta.

En teoria de conjunts, l'anomenat *programa de Gödel* és el programa que consisteix a eliminar el problema de la indecidibilitat afegint a ZFC nous axiomes. Diguem que una extensió axiomàtica de ZFC és gödeliana si té les propietats esmentades al text citat més amunt. Així, el programa de Gödel consisteix a trobar una jerarquia de teories gödelianes que permetin decidir més i més qüestions. Increïblement, hem descobert una jerarquia d'axiomes, la jerarquia d'*axiomes de grans cardinals*, que està ordenada linealment d'acord amb el seu grau de consistència. Gödel suggerí que potser aquests axiomes podrien eliminar el problema de la indecidibilitat, però Levy i Solovay (1967) van demostrar que els axiomes de grans cardinals no poden decidir la hipòtesi del continu.

Mentre que els grans cardinals en si mateixos no fan el que va predir Gödel, les teories derivades han tingut molt èxit en el sentit de Gödel. Una d'aquestes teories derivades extremament exitosa és ZF, juntament amb l'*axioma de determinació*, AD, el qual postula que tot joc amb dos jugadors, de longitud ω i informació perfecta, està determinat, això és, un dels dos jugadors té una estratègia guanyadora. Aquesta teoria té conseqüències molt interessants i decideix essencialment totes les qüestions naturals sobre conjunts de nombres reals. En particular, implica que tots els conjunts de reals són mesurables en el sentit de Lebesgue, tenen la propietat de Baire i tenen la propietat del conjunt perfecte. AD és, doncs, gairebé un axioma gödelià, però malauradament contradiu l'axioma de l'elecció.

L'axioma AD i les seves extensions, com l'axioma AD^+ de Woodin, o l'axioma $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}}$ + "Θ és un cardinal regular", tenen moltes conseqüències importants, però com que AD contradiu AC, és fàcil de rebutjar AD i les seves extensions com una jerarquia equivocada d'axiomes. Tot i això, en un treball pioner Steel i van Wesep (1982) van mostrar que fent *forcing* sobre un model de ZF i $\mathsf{AD}_{\mathbb{R}}$ + "Θ és un cardinal regular" s'obté un model de ZFC en el qual l'ideal dels conjunts no estacionaris del primer cardinal no numerable, ω_1, és saturat. Aquesta fou la primera construcció de tal model, tot i que es fes a partir d'una teoria que aleshores encara no es coneixia que fos consistent relativament a l'existència de grans cardinals. Treballs posteriors de Martin, Steel i Woodin establiren la consistència d'AD a partir de grans cardinals i, paral·lelament,

[4] Kurt Gödel, *What is Cantor's continuum problem?*, American Mathematical Monthly, USA **54** (1947), p. 515–525.

Woodin va simplificar, modificar i augmentar el mètode de *forcing* de Steel i Van Wesep creant una tecnologia de *forcing* molt potent, la tècnica $\mathbb{P}_{\mathsf{max}}$, que permet fer verdaders una gran varietat d'enunciats a partir d'un model d'AD. L'exploració per part de Woodin de les extensions $\mathbb{P}_{\mathsf{max}}$ de models d'AD el va dur a la formulació d'un axioma, anomenat Axioma $(*)$, que axiomatitza l'enunciat que diu que el conjunt potència de ω_1 està contingut en una extensió $\mathbb{P}_{\mathsf{max}}$ de $L(\mathbb{R})$, el menor model transitiu de ZF que conté tots els ordinals i tots els reals. L'Axioma $(*)$ té moltes conseqüències importants, i en molts sentits és l'axioma universal per al fragment de l'univers que es pot codificar amb subconjunts de ω_1. L'Axioma $(*)$ implica que el continu té cardinalitat ω_2 i decideix una classe molt àmplia, la classe Π_2, d'enunciats sobre aquesta part de l'univers. Així doncs, l'Axioma $(*)$, que és compatible amb ZFC i està basat en AD, és gödelià.

Un altre triomf del programa de Gödel fou el descobriment dels *axiomes de forcing*. El *forcing* és un mètode que permet afegir nous conjunts a l'univers conjuntista tot preservant els axiomes de la teoria de conjunts. Els axiomes de *forcing* diuen que grans fragments del nou univers ja es troben en l'univers de partida. L'axioma de *forcing* més conegut és l'*axioma de Martin* (MA), que és equivalent, en la seva formulació topològica, a la generalització natural del teorema de categoria de Baire al cas no numerable.

Tota extensió de *forcing* de l'univers conjuntista ve donada per un ordre parcial, típicament l'ordre parcial que consisteix en aproximacions al nou objecte que es vol afegir. L'axioma MA és l'axioma de *forcing* que correspon als ordres parcials que tenen totes les anticadenes numerables. Estenent la classe d'ordres parcials s'obtenen axiomes de *forcing* més potents. Els axiomes de *forcing*, però, no poden valer per a tots els ordres parcials. La col·lecció màxima d'ordres parcials per la qual podem tenir un axioma de *forcing* consistent és la col·lecció d'ordres parcials que no alteren massa el cardinal ω_1, més precisament la col·lecció d'ordres parcials que preserven conjunts estacionaris de ω_1. En un treball revolucionari, Foreman, Magidor i Shelah (1988) van aïllar el que ara es coneix com l'axioma *Martin's maximum* (MM), l'axioma de *forcing* que val per a la classe d'ordres parcials esmentada. L'axioma MM i la seva extensió natural coneguda com a MM^{++} tenen moltes conseqüències importants i permeten resoldre un gran nombre de qüestions en diverses àrees de la matemàtica. Tal com amb AD i el seu axioma Axiom $(*)$, que és compatible amb AC, els axiomes de *forcing* eliminen els exemples patològics de molts contextos i resolen problemes indecidibles d'acord amb la intuïció prevalent.

La teoria de conjunts és molt rica sota MM^{++}. Per exemple, MM^{++} implica l'existència d'un grup de Whitehead que no és lliure, que la cardinalitat del continu és ω_2, que tots els conjunts ω_1-densos de reals són ordre-isomorfs, la conjectura de Kaplansky, l'existència d'una base de 5 elements per a la classe d'ordres lineals no numerables i molts altres enunciats interessants que són indecidibles en ZFC.

Tant l'Axioma$(*)$ com MM^{++} són, doncs, axiomes molt convincents. Des d'una perspectiva fundacional, però, estan molt allunyats, ja que es basen en idees completament diferents. Per tant, la qüestió òbvia és quin dels dos axiomes hem de triar per afegir-lo a ZFC.

El Premi Hausdorff s'atorga a un treball que mostra que, de fet, no hi ha elecció. Al seu article, David Asperó i Ralf Schindler, combinant una gamma molt extensa de tècniques sofisticades que van de la teoria de models interns a la teoria del *forcing* L de Jensen, mostren que MM^{++} implica l'Axioma $(*)$. El resultat d'Asperó i Schindler és un pas fonamental cap a l'amalgamació de dues de les extensions més gödelianes de ZFC. Construeixen ponts entre dues subàrees de la teoria de conjunts aparentment disjuntes: l'estudi dels axiomes de determinació i el dels axiomes de *forcing*.

Caldrà més treball per entendre si és possible una amalgamació completa entre els models d'MM^{++} i els models obtinguts com a extensions $\mathbb{P}_{\mathsf{max}}$ de models d'AD. És possible que una extensió de forcing d'un model d'AD sigui un model d'MM^{++}? És possible trobar una tecnologia unificada per construir models de determinació i models d'axiomes de *forcing* a partir de grans cardinals? Els axiomes de *forcing* i els axiomes de determinació són essencialment el mateix, però expressats en llenguatges diferents? Siguin quines siguin les respostes, el resultat d'Asperó i Schindler serà el centre de tot això durant moltes dècades.